

Contrôle n° 7

Exercice 1 : (5 points)

1. Soit (U_n) la suite définie par :
$$\begin{cases} U_0 = 3 \\ U_{n+1} = \frac{2U_n + 1}{3} \end{cases}$$

Calculer U_1 ; U_2 et U_3 .

2. Soit (V_n) la suite définie pour tout $n \in \mathbb{N}$: $V_n = 2n^2 + 3n - 1$
 Calculer V_1 , V_2 et V_3 .
 Déterminer V_{n+1} , puis V_{2n} en fonction de n .

Exercice 2 : (3,5 points)

1. (U_n) est une suite arithmétique de raison r et telle que : $U_{26} = 3$ et $U_{42} = -13$.
 Déterminer r puis U_0 .
2. (V_n) est une suite arithmétique de raison r avec $V_1 = -4$ et $V_{20} = 35$.
 Calculer $S = V_1 + V_2 + V_3 + \dots + V_{20}$.

Exercice 3 : (3,5 points)

1. Soit (U_n) une suite géométrique de raison $q > 0$ et telle que : $U_{10} = 2$ et $U_{12} = 32$.
 Déterminer q et U_7 .
2. Calculer $S = \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16} + \frac{1}{32} + \dots + \frac{1}{1024}$.

Exercice 4 : (8 points)

Jean et Pierre sont deux jumeaux ; Jean qui est fumeur, dépense 600 € par an pour l'achat de ses cigarettes. Pierre, qui ne fume pas, lui demande d'imaginer les économies qu'il réaliserait s'il plaçait cette somme plutôt que de continuer à fumer. Il lui propose de déposer tous les ans, le 2 janvier, cette somme de 600 € sur un compte rémunéré à intérêts composés par la banque, au taux annuel de 3%. La banque ajoute chaque année, le 31 décembre, les intérêts acquis sur le compte.

Le 2 janvier 1999, il verse 600 € et les intérêts acquis sont capitalisés le 31 décembre 1999. Tous les ans le 2 janvier il verse à nouveau 600 €.

1. Quelle est la somme disponible sur le livret aux dates suivantes :
- Le 3 janvier 2000 ?
 - Le 3 janvier 2001 ?
2. On note :
- U_0 la somme disponible sur le livret le 3 janvier 1999
 - U_1 la somme disponible sur le livret le 3 janvier 2000
 - U_2 la somme disponible sur le livret le 3 janvier 2001 ;
 - ...
 - U_n la somme disponible sur le livret le 3 janvier de l'année 1999 + n ($n \in \mathbb{N}$).
- Montrer qu'on a la relation : $U_{n+1} = 1,03U_n + 600$.
3. Soit (V_n) la suite définie pour tout entier n par : $V_n = U_n + 20\,000$
 Montrer que (V_n) est géométrique et préciser ses éléments caractéristiques (q et V_0).
4. En déduire une expression de V_n en fonction de n , puis de U_n en fonction de n .
5. Pierre affirme qu'en moyenne un fumeur s'arrête après avoir fumé pendant 30 ans.
 De quelle somme Jean aurait-il pu disposer le 3 janvier 2029 ?

CORRECTION

Exercice 1 :

$$1. U_1 = \frac{7}{3} \quad U_2 = \frac{17}{9} \quad U_3 = \frac{43}{27}$$

$$2. V_1 = 4 \quad V_2 = 13 \quad V_3 = 26$$
$$V_{n+1} = 2(n+1)^2 + 3(n+1) - 1$$
$$= 2n^2 + 7n + 4$$

$$V_{2n} = 2(2n)^2 + 3(2n) - 1$$
$$= 8n^2 + 6n - 1$$

Exercice 2 :

$$1. U_{42} = U_{26} + 16r \Rightarrow \boxed{r = -1} \quad \text{Alors } U_{26} = U_0 + 26r \Leftrightarrow \boxed{U_0 = 29}$$

$$2. S = \frac{20}{2} (-4 + 35) \Rightarrow \boxed{S = 310}.$$

Exercice 3 :

$$1. U_{12} = U_{10} \times q^2 \Rightarrow q^2 = 16 \text{ et alors } \boxed{q = 4} \text{ car } q > 0. \text{ Il s'en suit que } U_{10} = U_7 \times q^3 \Rightarrow \boxed{U_7 = \frac{2}{64}}$$

$$2. S = \frac{\frac{1}{2048} - \frac{1}{2}}{\frac{1}{2} - 1} = 2\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{1024}\right) \text{ donc } \boxed{S = \frac{1023}{1024}}$$

Exercice 4 :

$$1. a) 3 \text{ janv. } 2000 : 600 \times 1,03 + 600 = 1\,218 \text{ €}$$

$$b) 3 \text{ janv. } 2001 : 1\,218 \times 1,03 + 600 \approx 1\,854,54 \text{ €}$$

2) Le 3 janv. 1999 + (n + 1) il a la somme de l'année précédente (soit U_n) à laquelle on ajoute 3% d'intérêts et 600 € déposé la veille.

$$\text{Soit } U_{n+1} = U_n + \frac{3}{100}U_n + 600 \text{ et donc } U_{n+1} = 1,03U_n + 600.$$

$$3) V_{n+1} = U_{n+1} + 20\,000$$
$$= 1,03 U_n + 600 + 20\,000$$
$$= 1,03 (V_n - 20\,000) + 20\,600$$
$$= 1,03 V_n - 20\,600 + 20\,600 \quad \text{et donc } V_{n+1} = 1,03 V_n.$$

Ainsi (V_n) est géométrique de raison $q = 1,03$ et de premier terme $V_0 = U_0 + 20\,000 = 20\,600$

$$4) \text{ Par propriété : } V_n = V_0 \times q^n \text{ soit } \boxed{V_n = 20\,600 \times 1,03^n}$$

$$\text{Il s'en suit que } U_n = V_n - 20\,000 \text{ peut se réécrire : } \boxed{U_n = 20\,600 \times 1,03^n - 20\,000}$$

$$5) \text{ Alors le 3 janv. } 2029 : U_{30} = 20\,600 \times 1,03^{30} - 20\,000$$
$$\approx 39\,401,61 \text{ €}$$

Rmq : ceci suppose que pendant 30 ans le budget annuel en cigarettes de Jean est resté identique chaque année, ce qui est une approximation grossière compte tenu de l'augmentation annuelle du tabac...