

Contrôle N° n

*Durée : 2 heures.
Calculatrice autorisée.*

Exercice 1 : (5 points)

On considère la suite $(U_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définie par $U_0 = 5$ et, pour tout entier $n \geq 1$:

$$U_n = \left(1 + \frac{2}{n}\right) U_{n-1} + \frac{6}{n}.$$

1) a) Calculer U_1 .

b) Les valeurs de $U_2, U_3, U_4, U_5, U_6, U_7, U_8, U_9, U_{10}, U_{11}$ sont respectivement égales à :
45, 77, 117, 165, 221, 285, 357, 437, 525, 621.

A partir de ces données, conjecturer la nature de la suite $(d_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définie par
 $d_n = U_{n+1} - U_n$.

2) On considère la suite arithmétique $(V_n)_{n \in \mathbb{N}}$ de raison 8 et de premier terme $V_0 = 16$.

Justifier que la somme des n premiers termes de cette suite est égale à : $4n^2 + 12n$.

3) Démontrer par récurrence que pour tout entier naturel n on a : $U_n = 4n^2 + 12n + 5$.

4) Valider la conjecture émise à la question 1)b).

Exercice 2 : (9 points)

On considère l'équation notée (E) : $\ln x = -x$.

Le but de l'exercice est de prouver que l'équation (E) admet une solution unique notée α appartenant à l'intervalle $]0 ; +\infty[$ et d'utiliser une suite convergente pour en obtenir un encadrement.

Partie A - Existence et unicité de la solution

On considère la fonction f définie sur l'intervalle $]0 ; +\infty[$ par : $f(x) = x + \ln x$.

1. Déterminer le sens de variation de la fonction f sur l'intervalle $]0 ; +\infty[$.

2. Démontrer que l'équation $f(x) = 0$ admet une unique solution notée α dans $]0 ; +\infty[$.

3. Vérifier que : $\frac{1}{2} \leq \alpha \leq 1$.

Partie B - Encadrement de la solution α

On considère la fonction g définie sur l'intervalle $]0 ; +\infty[$ par : $g(x) = \frac{4x - \ln x}{5}$.

1. Etude de quelques propriétés de la fonction g

a) Etudier le sens de variation de la fonction g sur l'intervalle $]0 ; +\infty[$.

b) En déduire que pour tout nombre réel x appartenant à l'intervalle $[\frac{1}{2}; 1]$, $g(x)$ appartient à cet intervalle.

c) Démontrer qu'un nombre réel $x \in]0 ; +\infty[$ est solution de l'équation (E) si, et seulement si, $g(x) = x$.

2. On considère la suite (U_n) définie par $U_0 = \frac{1}{2}$ et $\forall n \in \mathbb{N} U_{n+1} = g(U_n)$.

a) En utilisant le sens de variation de la fonction g , démontrer par récurrence que :

pour tout entier naturel n : $\frac{1}{2} \leq U_n \leq U_{n+1} \leq 1$.

b) En déduire que la suite (U_n) converge vers α .

3. Recherche d'une valeur approchée de α

a) À l'aide de la calculatrice, déterminer une valeur approchée de U_{10} , arrondie à la sixième décimale.

b) On admet que U_{10} est une valeur approchée par défaut à 5×10^{-4} près de α .
En déduire un encadrement de α sous la forme $u \leq \alpha \leq v$ où u et v sont deux décimaux écrits avec trois décimales.

Exercice 3 : (6 points)

Partie A : question de cours

On suppose connus les résultats suivants :

(1) : deux suites (U_n) et (V_n) sont adjacentes lorsque : l'une est croissante, l'autre décroissante et $U_n - V_n$ tend vers 0 quand n tend vers $+\infty$.

(2) : si (U_n) et (V_n) sont deux suites adjacentes telles que (U_n) est croissante et (V_n) est décroissante, alors pour tout n appartenant à \mathbb{N} , on a $U_n \leq V_n$.

(3) : toute suite croissante et majorée est convergente ; toute suite décroissante et minorée est convergente.

Démontrer alors la proposition suivante :

« Deux suites adjacentes sont convergentes et ont la même limite ».

Partie B : Vrai / Faux

On considère la suite (U_n) définie sur \mathbb{N} dont aucun terme n'est nul. On définit alors la

suite (V_n) sur \mathbb{N} par : $V_n = \frac{-2}{U_n}$.

Pour chaque proposition, indiquer si elle est vraie ou fausse et proposer une démonstration pour la réponse indiquée. Dans le cas d'une réponse fausse la démonstration consistera à fournir un contre-exemple. Une réponse non démontrée ne rapporte aucun point.

1. si (U_n) est convergente, alors (V_n) est convergente.

2. Si (U_n) est minorée par 2, alors (V_n) est minorée par (-1) .

3. Si (U_n) est décroissante, alors (V_n) est croissante.

4. Si (U_n) est divergente, alors (V_n) converge vers 0.

CORRECTION

Exercice 1 :

La Réunion, juin 2008 :

http://www.maths-france.fr/Terminale/TerminaleS/ProblemesBac/AnnalesThematiques/Suites/BacS_Juin_2008_Obligatoire_Reunion_Exo3_Corrige.pdf

Exercice 2 :

Asie, juin 2009 :

http://www.maths-france.fr/Terminale/TerminaleS/ProblemesBac/AnnalesThematiques/Suites/BacS_Juin_2009_Obligatoire_Asie_Exo3_Corrige.pdf

Exercice 3 :

France, juin 2005 :

http://www.maths-france.fr/Terminale/TerminaleS/ProblemesBac/AnnalesThematiques/Suites/BacS_Juin_2005_Obligatoire_Exo1_Corrige.pdf