$1^{ière}$ S4 **Jeudi 25 mars**

Contrôle N° n

Exercice 1 : (4 points)

Soit (V_n) la suite définie pour tout $n \in \mathbb{N}$: $V_n = 2n^2 + 3n - 1$

Calculer V_1 , V_2 et V_3.

Déterminer V_{n+1}, puis V_{2n} en fonction de n.

Exercice 2 : (4 points)

1. (U_n) est une suite arithmétique de raison r et telle que : $U_{26} = 3$ et $U_{42} = -13$.
   Déterminer r puis U_0.
2. (V_n) est une suite arithmétique de raison r avec $V_1 = -4$ et $V_{20} = 35$.
   Calculer $S = V_1 + V_2 + V_3 + \ldots + V_{20}$.

Exercice 3 : (10 points)

Soit (Un) la suite définie par $U_0 = 6$ et $U_{n+1} = \frac{3 + 2U_n}{5}$ (pour tout $n > 0$).

1. Calculer U_1 ,U_2 et U_3

2. On considère la suite (V_n) définie par $V_n = U_n - 1$ (pour tout $n > 0$).

a) Montrer que la suite (V_n) est géométrique et donner sa raison q et son premier terme V_0.

b) Déduire de la question précédente que $U_n = 1 + 5\times(\frac{2}{5})^n$. (pour tout $n > 0$).

c) Déterminer alors $\lim\limits_{n \to +\infty} U_n$

d) Montrer que $U_{n+1} - U_n = -3\times(\frac{2}{5})^n$. ($\forall n > 0$).et en déduire que la suite (U_n) est décroissante.

3. Exprimer en fonction de n la somme : $V_0 + V_1 + \ldots + V_n$.

En déduire que $U_0 + U_1 + \ldots + U_n = \frac{25}{3}\left(1 - (\frac{2}{5})^{n+1}\right) + n + 1$. (pour tout $n > 0$).

Exercice 3 : (4 points)

Monsieur et Madame Dupont visite Rome avec leur fille Claudette. A midi, ils déjeunent dans une pizzeria où ils commandent une « pizza marinera-cappriciosa » (spécialité de la maison). Quand ladite pizza arrive, Claudette, qui est très gourmande, en prend la moitié. La mère prend la moitié du reste ; le père, la moitié de ce qui reste alors. Puis Claudette en reprend, en veillant toujours à laisser la moitié du reste à ses parents qui, tour à tour, en font autant, puis Claudette à nouveau…jusqu'à la dernière miette.

La pizza servie pesait 780 grammes. Montrer que Claudette a mangé environ 445,71 g de pizza.

<u>Indication :</u> *non, c'est trop simple… sacrée Claudette !*

CORRIGE

Exercice 1 :

$V_1 = 4$ $V_2 = 13$ $V_3 = 26$

$V_{n+1} = 2(n+1)^2 + 3(n+1) - 1$
$= 2n^2 + 7n + 4$

$V_{2n} = 2(2n)^2 + 3(2n) - 1$
$= 8n^2 + 6n - 1$

Exercice 2 :

1. $U_{42} = U_{26} + 16r \Rightarrow \boxed{r = -1}$ Alors $U_{26} = U_0 + 26r \Leftrightarrow \boxed{U_0 = 29}$

2. $S = \frac{20}{2}(-4 + 35) \Rightarrow \boxed{S = 310}$.

Exercice 3 :

1. $U_1 = 3$ $U_2 = \frac{9}{5}$ $U_3 = \frac{33}{25}$

2. a) $V_{n+1} = U_{n+1} - 1 = \frac{3 + 2U_n}{5} - 1 = \frac{3 + 2(V_n + 1) - 5}{5} = \frac{2\,V_n}{5}$

Ainsi (V_n) est une suite géométrique de raison $q = \frac{2}{5}$ et de premier terme $V_0 = U_0 - 1 = 5$

b) On déduit que $\forall\, n \in \mathbb{N} : V_n = V_0 \times q^n = 5 \times (\frac{2}{5})^n$

Il s'en suit que $U_n = V_n + 1 = 1 + 5 \times (\frac{2}{5})^n$

c) $|q| < 1 \Rightarrow (V_n)$ converge vers 0 et donc, $\lim\limits_{n \to +\infty} U_n = 1$

d) $U_{n+1} - U_n = (1 + 5 \times (\frac{2}{5})^{n+1}) - (1 + 5 \times (\frac{2}{5})^n) = 5 \times (\frac{2}{5})^n \times (\frac{2}{5} - 1)) = -3\times(\frac{2}{5})^n$

3. $$V_0 + V_1 + \ldots + V_n = \frac{V_{n+1} - V_0}{q - 1} = \frac{5 \times (\frac{2}{5})^{n+1} - 5}{\frac{2}{5} - 1} = \frac{5 \times (1 - (\frac{2}{5})^{n+1})}{\frac{3}{5}} = \frac{5}{3} \times 5 \times (1 - (\frac{2}{5})^{n+1})$$

$$= \frac{25}{3}(1 - (\frac{2}{5})^{n+1})$$

Il s'en suit que : $U_0 + U_1 + \ldots + U_n = (V_0 + 1) + (V_1 + 1) + (V_2 + 1) + \ldots + (V_n + 1)$
$= (V_0 + V_1 + \ldots + V_n) + (n + 1)$
$= \frac{25}{3}(1 - (\frac{2}{5})^{n+1}) + n + 1$

Exercice 4 :

1ière solution :

Au 1ier tour : Claudette mange $\frac{780}{2}$ g de pizza

Sa mère : $\frac{\frac{780}{2}}{2} = \frac{780}{4}$ g de pizza

Son père : $\dfrac{\frac{780}{4}}{2} = \dfrac{780}{8}$ g de pizza

Au 2ième tour : Claudette mange $\dfrac{780}{16}$ g ; sa mère $\dfrac{780}{32}$ g et son père $\dfrac{780}{64}$ g

Au 3ième tour : Claudette mange $\dfrac{780}{128}$ g ; sa mère $\dfrac{780}{256}$ g et son père $\dfrac{780}{512}$ g

On définit alors la suite (U_n) par $U_0 = 780$ et $U_{n+1} = \dfrac{1}{8} U_n$.

Ainsi (U_n) représente la quantité de pizza que Claudette mange au nième tour.
(U_n) est géométrique de raison q et donc au nième tour Claudette a mangé :

$$Q = U_1 + U_2 + U_3 + \dots + U_n$$
$$= \frac{U_{n+1} - U_1}{q - 1}$$
$$= \frac{780 \times (\frac{1}{8})^{n+1} - 390}{\frac{1}{8} - 1} = \frac{8}{7} \times (390 - \frac{780}{8^{n+1}})$$

Alors, comme Claudette est une « grosse bouffe » et qu'elle mange jusqu'à la dernière miette, on détermine :

$$\lim_{n \to +\infty} \frac{8}{7} \times (390 - \frac{780}{8^{n+1}}) = 8 \times \frac{390}{7} \approx 445{,}714 \text{ g.}$$

2ième solution :

On peut considérer qu'à partir du 4ième tour (ou 5ième) les parts sont vraiment petites donc négligeables et se contenter de la valeur approchée de la quantité mangée en effectuant la somme $U_1 + U_2 + U_3 + U_4$ et ainsi s'épargner la limite à l'infini.

3ième solution : (pour les malins)

On peut remarquer que le père mange le moins, que sa femme mange le double de lui et sa fille le double de sa femme, c'est-à-dire 4 fois plus que lui.
Donc si le père a mangé une quantité x, sa femme a mangé 2x et Claudette 4x.
Il s'en suit que $x + 2x + 4x = 780$

Soit $7x = 780$

Alors Claudette a mangé $4x = 4 \times \dfrac{780}{7} \approx 445{,}714$ g

Rmq : on retrouve la réponse exacte de la 1ière solution puisque : $4 \times \dfrac{780}{7} = 8 \times \dfrac{390}{7}$