Les suites

I. Rappels

1. Généralités

→ Il existe deux façons de définir une suite :

1) avec une relation explicite : $U_n = f(n)$

2) avec une relation de récurrence : $\begin{cases} U_0 = a \\ U_{n+1} = f(U_n) \end{cases}$

Prop : une suite (U_n) est croissante (resp. décroissante) si et seulement si $U_{n+1} \geq U_n$ (resp. $U_{n+1} \leq U_n$)

Rmq : 1) une suite est croissante ssi $U_{n+1} - U_n \geq 0$

2) si $U_n > 0 \ \forall n \in \mathbb{N}$, alors ($U_n$) croissante ssi $\dfrac{U_{n+1}}{U_n} > 1$.

2. Suites arithmétiques

Déf : (U_n) arithmétique $\Leftrightarrow$ $\mathbf{U_{n+1} = U_n + r}$ $\forall n \in \mathbb{N}$. $r \in \mathbb{R}$ est la **raison** de la suite.

Prop : $U_n = U_p + (n-p)r$; $\forall n, p \in \mathbb{N}$.

En particulier : $U_n = U_0 + nr$ et $U_n = U_1 + (n-1)r$

Somme : $S = U_0 + U_1 + \dots + U_n = \dfrac{n+1}{2}(U_0 + U_n)$

De façon générale, on peut retenir : $S = \dfrac{N^{bre} \text{ de termes}}{2}$ (1^{ier} terme + dernier terme).

3. Suites géométriques

Déf : (U_n) géométrique $\Leftrightarrow$ $\mathbf{U_{n+1} = q \times U_n}$ $\forall n \in \mathbb{N}$. $q \in \mathbb{R}$ est la **raison** de la suite.

Prop : $U_n = U_p \times q^{n-p}$; $\forall n, p \in \mathbb{N}$.

En particulier, $U_n = U_0 \times q^n$ et $U_n + U_1 \times q^{n-1}$

Somme : $S = U_0 + U_1 + \dots + U_n = \dfrac{U_{n+1} - U_0}{q-1}$

De façon générale, on peut retenir : $S = \dfrac{\text{Le terme après le dernier} - \text{le } 1^{ier}}{q-1}$

II. Limite d'une suite

1. Propriétés

Déf : Une suite (U_n) telle que $\lim\limits_{n \to +\infty} U_n = \ell$ ($\ell \in \mathbb{R}$) est dite convergente vers ℓ.

Propriété : 1) Si $U_{n+1} = f(V_n)$ avec $\lim\limits_{n \to +\infty} V_n = b$ et $\lim\limits_{x \to b} f(x) = \ell$ alors $\lim\limits_{n \to +\infty} U_n = \ell$.

2) Thérème des gendarmes pour les suites :

$U_n \leq V_n \leq W_n$ et $\lim\limits_{n \to +\infty} U_n = \lim\limits_{n \to +\infty} W_n = \ell \Rightarrow \lim\limits_{n \to +\infty} U_n = \ell$ ($\ell = \pm\infty$ ou $\in \mathbb{R}$)

3) Théorème de comparaison pour les suites :

$U_n \leq V_n$ avec $\lim\limits_{n \to +\infty} U_n = +\infty \Rightarrow \lim\limits_{n \to +\infty} V_n = +\infty$

3) Si $U_{n+1} = f(U_n)$ avec (U_n) convergente et f continue, alors (U_n)converge vers ℓ tel que $\mathbf{f(\ell) = \ell}$.

2. Convergence des suites monotones

Déf : Une suite (U_n) est dite **majorée** (resp. minoré) s'il existe un réel M (resp. m) tel que : $\forall n \in \mathbb{N} \ U_n \leq M$ (resp. $U_n \geq m$).

Une suite majorée et minorée est **bornée**.

Thérème : Toute suite croissante majorée ou décroissante minorée converge.

III. Suites adjacentes.

Déf. : Soit (U_n) et (V_n) deux suites telles que l'une est croissante, l'autre décroissante et la différence des deux $(U_n - V_n)$ tend vers 0. Alors (U_n) et (V_n) sont dites **adjacentes**.

Théorème : Deux suites adjacentes convergent et ont la même limite.