Probabilités

I. Rappels

A et B sont deux **événements** d'un **univers** Ω, alors en situation d'**équiprobalilité**, on a :

$$p(A) = \frac{N^{bre} \text{ de cas favolrables}}{N^{bre} \text{ de cas total}}$$

$p(\overline{A}) = 1 - p(A)$ ($\overline{A}$ est l'**événement contraire** de A)

$p(A \cup B) = p(A) + p(B) - p(A \cap B)$ ($A \cap B$ = A <u>et</u> B; $A \cup B$ = A <u>ou</u> B)

A et B sont **indépendants** si et seulement si $p(A \cap B) = p(A) \times p(B)$

X est une **variable aléatoire**, alors $E(X) = \Sigma\, x_i.p(X = x_i)$

II. Dénombrement

Soit p et n deux entiers naturels tels que $p \leq n$. On choisit p boules dans une urne en contenant n, alors s'il s'agit d'un :

.tirage successif avec remise (= ordre et répétition), il y a $\mathbf{n^p}$ cas favorables

.tirage successif sans remise (= ordre et pas répétition), il y a :

$\mathbf{n \times (n-1) \times (n-2) \times \ldots \times (n-(p-1))}$ cas favorables

rmq : 1) il y a p termes dans le produit

2) si p = n, il s'agit du nombre de permutations : n !

.tirage simultané : (pas d'ordre), il y a $\mathbf{\binom{n}{p} = \dfrac{n\,!}{(p\,!) \times (n-p)\,!}}$ cas favorables.

<u>Combinaisons :</u>

* Il y a $\binom{n}{p} = \dfrac{n\,!}{(p\,!) \times (n-p)\,!}$ combinaisons à p éléments dans un ensemble en contenant n.

* Propriétés : 1) $\binom{n}{p} = \binom{n}{n-p}$

2) $\binom{n}{p} = \binom{n-1}{p-1} + \binom{n-1}{p}$

* Formule du binôme (de Newton) : $(a+b)^n = \sum_{i=0}^{i=n} \binom{n}{i} a^{n-i}\, b^i$

Il s'en suit le triangle de Pascal

III. Probabilités conditionnelles

<u>Déf.</u> : A et B sont 2 événements d'une même expérience aléatoire, avec $p(B) \neq 0$, alors on note $p_B(A)$ la probabilité de A sachant B (c'est-à-dire sachant que B est réalisé) le réel :

$$p_B(A) = \frac{p(A \cap B)}{p(B)}$$

<u>Formule des probabilités totales :</u> Soit A un événement et $B_1, B_2, B_3, \ldots, B_n$ n événements tels que : $B_1 \cup B_2 \cup B_3 \cup \ldots \cup B_n = \Omega$ et $\forall$ i, j $B_i \cap B_j = \varnothing$ (événements incompatibles).

Alors $p(A) = p(A \cap B_1) + p(A \cap B_2) + p(A \cap B_3) + \ldots + p(A \cap B_n)$.

Cas particulier : $\forall$ A, B : $p(A) = p(A \cap B) + p(A \cap \overline{B})$

IV. Cas de deux variables aléatoires

<u>Déf.</u> : X et Y sont deux variables aléatoires prenant les valeurs $x_1, x_2, \ldots x_n$ et $y_1, y_2, \ldots y_p$. On définit alors la loi de proba sur (X ; Y) par $p(X = x_i\,;\, Y = y_j)$ $\forall$ i, j $\in$ à leur domaine respectif.

<u>Déf.</u> : Deux variables aléatoires X et Y sont indépendantes si et seulement si pour tout i et j : $p(X = x_i\,;\, Y = y_j) = p(X = x_i) \times p(Y = y_j)$.