

Dérivation

I. Nombre dérivé

1. Taux d'accroissement

Rappel : Soit $A(x_A; y_A)$ et $B(x_B; y_B)$, alors le taux d'accroissement de (AB) est $m = \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A}$

Déf. : On appelle **nombre dérivé** de f en $x = a$, s'il existe, le réel $f'(a) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h}$.

Explication : Ceci correspond au taux d'accroissement de (AM) avec A d'abscisse a fixé sur $y = f(x)$ et M d'abscisse $(a + h)$ mobile sur $y = f(x)$. Le nombre dérivé est le taux d'accroissement obtenu pour M « très proche » de A.

Dans ce cas (AM) se rapproche de la tangente en A à la courbe $y = f(x)$.

2. Tangente

Propriété : La tangente à la courbe d'équation $y = f(x)$ en $A(a; f(a))$ a pour équation :

$$y = f'(a)(x - a) + f(a)$$

Rmq : On remarque en particulier que $f'(a)$ est le coefficient directeur de la tangente en $x = a$.

II. Fonctions dérivées

1. Dérivée des fonctions usuelles

Fonction	Fonction dérivée
$f(x) = a$	$f'(x) = 0$
$f(x) = ax$	$f'(x) = a$
$f(x) = ax + b$	$f'(x) = a$
$f(x) = x^2$	$f'(x) = 2x$
$f(x) = x^n$	$f'(x) = n \cdot x^{n-1}$
$f(x) = \frac{1}{x}$	$f'(x) = -\frac{1}{x^2}$
$f(x) = \frac{1}{x^n}$	$f'(x) = -\frac{n}{x^{n+1}}$
$f(x) = \sqrt{x}$	$f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}$

2. Opérations sur les dérivées

u et v sont dérivables sur I , $k \in \mathbb{R}$:

* $(u + v)' = u' + v'$

* $(k \times u)' = k \times u'$

* $(u \times v)' = u'v + uv'$

* pour x tq $v(x) \neq 0$: $\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v - uv'}{v^2}$

III. Sens de variation d'une fonction

Théorème : Soit f une fonction dérivable sur I , alors si $\forall x \in I$, on a :

$f'(x) < 0$: f est décroissante sur I ,

$f'(x) > 0$: f est croissante sur I ,

$f'(x) = 0$: f est constante sur I .