1$^{\text{ière}}$ S Jeudi 22 avril

Contrôle N° (n+1)

Exercice 1 : (6 points)
Soit ABC un triangle, A', B' et C' les milieus respectifs de [BC], [AC] et [AB]. A tout point M du plan on associe le point f(M) = M' défini par $\overrightarrow{MM'} = k\,\overrightarrow{MA} + \frac{1}{2}\overrightarrow{MB} + \frac{1}{2}\overrightarrow{MC}$.

1. Montrer que si $k = -1$, l'application f est une translation dont on donnera le vecteur.
2. Montrer que si $k = \frac{1}{2}$, l'application f est une homothétie dont le centre est le centre de gravité du triangle ABC et dont on déterminera le rapport.
3. Donner la nature et les éléments caractéristiques de l'application f lorsque $k \neq -1$.

Exercice 2 : (7 points)
Soit ABCD un carré de côté 1. DBG, ABE et CBF sont des triangles équilatéraux.

1. a) Montrer que A et C sont sur la médiatrice de [BD]
b) En déduire que C, A et G sont alignés.
2. Déterminer une rotation qui transforme C, A et G respectivement en F, E et D.
3. En déduire que F, E et D sont alignés.
4. Déterminer EF.

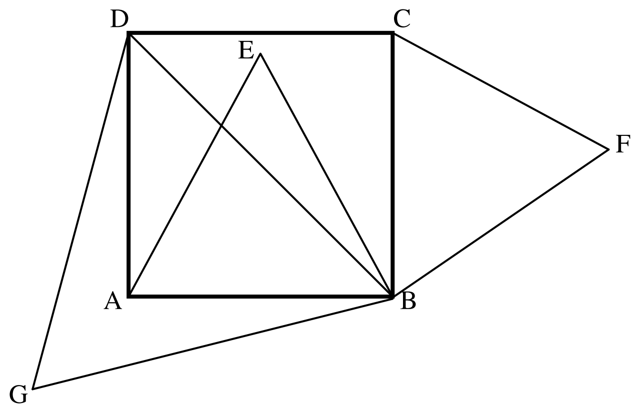

Figure indicative ne respectant pas les longueurs.

Exercice 3 : (4 points)
Soit (D) une droite et deux points A et B n'appartenant pas à (D). M est un point de (D). On appelle G le centre de gravité du triangle ABM.
Quel est l'ensemble des points G quand M décrit (D) ?

Exercice 4 : (4 points)
Soit (C) un cercle de diamètre [AB] et de centre O. M est un point de (C). La parallèle à (AM) passant par O coupe (BM) en N.
Quel est l'ensemble des points N quand M décrit (C) ?.

CORRIGE

Exercice 1 :

1. Si k = – 1, $\overrightarrow{MM'} = -\overrightarrow{MA} + \frac{1}{2}\overrightarrow{MB} + \frac{1}{2}\overrightarrow{MC} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}) = \overrightarrow{AA'}$.

   Alors M’ est l’image de M par la translation de vecteur $\vec{u} = \overrightarrow{AA'}$.

2. Si $k = \frac{1}{2}$, $\overrightarrow{MM'} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC}) = \frac{3}{2}\overrightarrow{MG}$

   Soit $\overrightarrow{MG} + \overrightarrow{GM'} = \frac{3}{2}\overrightarrow{MG}$ et donc $\overrightarrow{GM'} = -\frac{1}{2}\overrightarrow{GM}$ et don M’ est l’image de M par l’homothétie de centre G et de rapport $-\frac{1}{2}$.

3. Dans le cas général, on définit H barycentre de {(A ; k), (B ; $\frac{1}{2}$), (C ; $\frac{1}{2}$)}, on a alors :

   $\overrightarrow{MM'} = k\,\overrightarrow{MA} + \frac{1}{2}\overrightarrow{MB} + \frac{1}{2}\overrightarrow{MC} \iff \overrightarrow{MM'} = (1 + k)\,\overrightarrow{MH} \iff \overrightarrow{HM'} = -k\,\overrightarrow{HM}$

Exercice 2 :

1.a) AB = CD $\Rightarrow$ A $\in$ mediatrice [BD], de même CB = CD et donc C $\in$ médiatrice [BD].
b) GD = GB donc G $\in$ mediatrice [BD]. Finalement A, C et G sont sur la médiatrice de [BD] donc sont alignés.

2. Triangle équilatéraux donc rotation de centre B et d’angle $-\frac{\pi}{3}$.

3. C, A et G sont alignés et la rotation conserve l’alignement donc F, E et D sont alignés.

4. La roation conserve les longueurs donc : EF = CA. Ainsi, EF = $\sqrt{2}$.

Exercice 3 :

Soit A’ le milieu de [AB], alors $\overrightarrow{MG} = \frac{2}{3}\overrightarrow{MA'}$, soit encore $\overrightarrow{A'G} = \frac{1}{3}\overrightarrow{AM}$.

Ainsi G est l’image de M par l’homothétie de centre A et de rapport $\frac{1}{3}$, donc G est sur l’image de (D) par h, soit sur une droite parallèle à (D).

Exercice 4 :

Par le théorème des milieux (ON) parallèle (AM), on déduit N milieu de [BM].

On définit alors l’homothétie de centre B et de rapport $\frac{1}{2}$ par laquelle N est l’image de M.

Finalement, lorsque M décrit (C), N décrit l’image de (C) par h soit un cercle (C’) de centre O’ = h(O) (O’ milieu de [OB]) et de rayon r’ = $\frac{1}{2}$r soit de rayon r’ = OB.