NOM :
Prénom :
1S
Signatures des parents :

Devoir Synthèse

2 juin 2009

1	2	3	4	
/7	/6	/4	/3	**/20**

Penser à soigner la présentation de votre devoir (souligner, encadrer, aérer,…). Calculette autorisée.
Justifier toutes vos affirmations.

Exercice 1 :

Les quatre questions de cet exercice sont indépendantes.

1) Calculer la dérivée de la fonction g définie par :

$$g(x) = (3x+5)\sqrt{x}\ ,\ \ x > 0$$

2) Soit f la fonction définie sur $]4\,;+\infty[$ par $f(x) = \dfrac{3x+7}{4-x}$ et C_f sa courbe représentative dans un repère $(O, \vec{i}, \vec{j})$. Déterminer les limites suivantes et donner l'interprétation graphique des résultats :

$$\lim_{x\to 4} f(x)\ ;\quad \lim_{x\to+\infty} f(x)\ ;$$

3) Soit k la fonction définie sur $]0\,;+\infty[$ par $k(x) = 2x - 3 - \dfrac{1}{x}$. Calculer $\lim\limits_{x\to+\infty} k(x)$ puis donner l'équation de l'asymptote oblique à la courbe représentative C_k de la fonction k au voisinage de l'infini.

4) On note C la courbe représentative de la fonction h, définie sur $\mathbb{R}$, par $h(x) = x^3 + 3x^2 + 6x$.
Déterminer les coordonnées des points éventuels en lesquels la tangente à C a pour coefficient directeur 6.

Exercice 2 :

Soit (U_n) la suite définie par $U_0 = 6$ et $U_{n+1} = \dfrac{3+2U_n}{5}$ pour tout $n \geq 0$.

1) On considère la suite (V_n) définie par $V_n = U_n - 1$ pour tout $n \geq 0$. Montrer que $V_{n+1} = \dfrac{2}{5}V_n$ pour tout $n \geq 0$.
En déduire que la suite (V_n) est une suite géométrique dont on donnera la raison b et le premier terme V_0.

2) Déduire de la question précédente que $U_n = 1 + 5\times\left(\dfrac{2}{5}\right)^n$ pour tout $n \geq 0$.

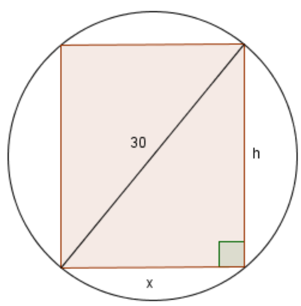
3) Montrer que $U_{n+1} - U_n = -3\times\left(\dfrac{2}{5}\right)^n$ pour tout $n \geq 0$. En déduire que la suite (U_n) est décroissante.

4) Montrer que : $V_0 + V_1 + \ldots + V_n = \dfrac{25}{3}\left(1 - \left(\dfrac{2}{5}\right)^{n+1}\right)$.
En déduire, pour tout $n \geq 0$, l'expression de la somme :
$$U_0 + U_1 + \ldots + U_n\ .$$

Exercice 3 :

Lorsqu'on veut équarrir un tronc d'arbre de manière à donner à la poutre la plus grande résistance possible à la flexion, on se garde bien de la faire carrée mais toujours plus haute que large.
Si la base est x et la hauteur h, exprimées en centimètres, on montre en mécanique que la résistance à la flexion est proportionnelle au produit xh^2. (Plus xh^2 est grand, plus la résistance est grande).
On dispose d'un tronc de 30 cm de diamètre et on veut fabriquer une poutre présentant le maximum de résistance à la flexion.
Sur le schéma ci-après, le rectangle représente la section de la poutre et le disque la section du tronc.

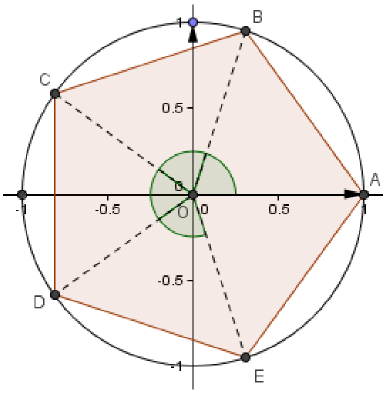
1) Exprimer xh^2 en fonction de x seul.
2) Etudier les variations de la fonction f, définie sur $[0\,;30]$, par : $f(x) = -x^3 + 900x$.
3) Déterminer les dimensions (arrondies au dixième de cm) qui offrent à la poutre la résistance maximale à la flexion.



Exercice 4 :

On a construit, dans le repère orthonormé direct $(O, \vec{i}, \vec{j})$ le cercle trigonométrique et, sur ce cercle, les points A, B, C, D et E tels que :

$\overrightarrow{OA} = \vec{i}$ et les angles orientés $(\overrightarrow{OA} ; \overrightarrow{OB})$, $(\overrightarrow{OB} ; \overrightarrow{OC})$, $(\overrightarrow{OC} ; \overrightarrow{OD})$, $(\overrightarrow{OD} ; \overrightarrow{OE})$ ont tous pour mesure $\frac{2\pi}{5}$, faisant apparaître le pentagone $ABCDE$ ci-dessous.



1) Déterminer la mesure principale de chacun des angles $(\overrightarrow{OA} ; \overrightarrow{OB})$, $(\overrightarrow{OA} ; \overrightarrow{OC})$, $(\overrightarrow{OA} ; \overrightarrow{OD})$ et $(\overrightarrow{OA} ; \overrightarrow{OE})$.
2) Exprimer, en fonction des mesures trouvées à la question 1), les coordonnées de vecteurs $\overrightarrow{OA}$, $\overrightarrow{OB}$, $\overrightarrow{OC}$, $\overrightarrow{OD}$ et $\overrightarrow{OE}$ dans le repère $(O, \vec{i}, \vec{j})$.
3) On considère le vecteur $\vec{V}$ défini par :

$$\vec{V} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} + \overrightarrow{OD} + \overrightarrow{OE}$$

et on note $\begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix}$ ses coordonnées dans le repère $(O, \vec{i}, \vec{j})$.

Montrer que : $X = 1 + 2\cos\frac{2\pi}{5} + 2\cos\frac{4\pi}{5}$